COLEGIUL NAŢIONAL
„VASILE LUCACIU”
BAIA MARE

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediţia a XII-a, Baia Mare, 25 noiembrie 2017

CLASA a VIII-a

Subiectul 1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$şi $x_1, x_2, \dots, x_n$ astfel încât $[x_1]=n, [x_2]=n+1, \dots, [x_n]=2n-1$. Prin $[a]$ înţelegem partea întreagă a numărului real a.

a) Aflaţi câte valori poate lua numărul $[x_1+x_2+\dots+x_n]$.

b) Determinaţi n, dacă valoarea maximă posibilă a lui $[x_1+x_2+\dots+x_n]$ este 56.

Subiectul 2.

a) Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ demonstraţi inegalitatea $a+b+c \le \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$.

b) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ asfel încât $a^2+b^2+c^2=1$.

i) Arătaţi că dacă $m, n, p \in \{0, 1, 2\}$ atunci $|ma+nb+pc| \le 2\sqrt{3}$.

ii) Arătaţi că există $x, y, z \in \mathbb{Z}$, nu toate nule, cu modulele strict mai mici decât 3, astfel încât

$$|xa+yb+zc| \le \frac{2\sqrt{3}}{13}.$$

Subiectul 3. Se consideră un cerc de rază R. Fie T un punct al cercului şi dreapta d tangentă cercului în punctul T. Pe dreapta d se consideră punctele A şi B, de aceeaşi parte a lui T astfel încât $TA \cdot TB = 4R^2$. Fie T' punctul diametral opus puctului T. Dreptele AT'şi BT' mai intersectează cercul în punctele P, respectiv Q. Demonstraţi că $PQ \perp d$.

Subiectul 4. Fie tetraedrul $ABCD$ cu $[AB] \equiv [AC]$ şi punctele $E \in (AB)$, $F \in (AC)$ astfel încât $[AE] \equiv [CF]$, M mijlocul segmentului $[FE]$ şi N mijlocul segmentului $[AD]$.
Arătaţi că $MN \parallel (BCD)$.

Notă:

1) Timp de lucru 3 h.
2) Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

COLEGIUL NATIONAL VASILE LUCACIU
Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro

Concursul "PRIN LABIRINTUL MATEMATICII"
ediţia a XII-a, Baia Mare, 25 noiembrie 2017

CLASA a VIII -a

Subiectul 1. . Fie $n \in \mathbb{N}^*$şi $x_1, x_2, \dots, x_n$ astfel încât $[x_1]=n, [x_2]=n+1, \dots, [x_n]=2n-1$. Prin $[a]$ înţelegem partea întreagă a numărului real a.

a) Aflaţi câte valori poate lua numărul $[x_1+x_2+\dots+x_n]$.

b) Determinaţi n, dacă valoarea maximă posibilă a lui $[x_1+x_2+\dots+x_n]$ este 56.

Soluţie: a) $n \le x_1 < n+1\,; n+1 \le x_2 < n+2\ ; \dots\dots; 2n-1 \le x_n < 2n$ **1p**

$$n^2+\frac{n(n-1)}{2} \le x_1+x_2+\cdots+x_n < n^2+\frac{n(n+1)}{2} \text{ și } n^2+\frac{n(n+1)}{2}-\left(n^2+\frac{n(n-1)}{2}\right)=n$$

$\Rightarrow$ avem n numere întregi intre $n^2+\frac{n(n-1)}{2}$ și $n^2+\frac{n(n+1)}{2}$ **2p**

Fie $k \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$. Pentru $x_1=n+\frac{k}{n}$, $x_2=n+1+\frac{k}{n}$, ….., $x_n=2n-1+\frac{k}{n}$ obținem $[x_1+x_2+\cdots+x_n]=n^2+\frac{n(n-1)}{2}+k$, deci se obțin cele n valori. **1p**

b) Valoarea maximă pentru $[x_1+x_2+\cdots+x_n]$ este $n^2+\frac{n(n+1)}{2}-1$ **1p**

$n^2+\frac{n(n+1)}{2}-1=56 \Leftrightarrow n(3n+1)=114 \Leftrightarrow n=6$ **2p**

Subiectul 2.

a) Dacă $a,b,c \in \mathbb{R}$ demonstraţi inegalitatea $a+b+c \le \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$.

b) Fie $a,b,c \in \mathbb{R}$ asfel încât $a^2+b^2+c^2=1$.

i) Arătaţi că dacă $m,n,p \in \{0,1,2\}$ atunci $|ma+nb+pc| \le 2\sqrt{3}$.

ii) Arătaţi că există $x,y,z \in \mathbb{Z}$, nu toate nule, cu modulele strict mai mici decât 3, astfel încât $|xa+yb+zc| \le \frac{2\sqrt{3}}{13}$.

Soluţie:

a) Dacă $a+b+c$ este număr negativ inegalitatea este adevărată. **1p**

Dacă $a+b+c \ge 0$ atunci $a+b+c \le \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca\ (A)$ **2p**

b)***i***)$|ma+nb+pc| \le m|a|+n|b|+p|c| \le 2(|a|+|b|+|c|) \le 2\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}=2\sqrt{3}$ **2p**

ii) Avem 27 de sume $S=ma+nb+pc$, unde $m,n,p \in \{0,1,2\}$ $|S| \le 2\sqrt{3}$

Împărțim intervalul $[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$ în 26 de intervale de lungimi $\frac{4\sqrt{3}}{26}=\frac{2\sqrt{3}}{13}$

Din principiul cutiei vor exista 2 sume $S_1=m_1a+n_1b+p_1c$ și $S_2=m_2a+n_2b+p_2c$ situate în același interval $\Rightarrow |S_1-S_2| \le \frac{2\sqrt{3}}{13} \Rightarrow |(m_1-m_2)a+(n_1-n_2)b+(p_1-p_2)c| \le \frac{2\sqrt{3}}{13}$

$x=m_1-m_2\,, y=n_1-n_2\,, z=p_1-p_2$ verifică cerința. **2p**

Subiectul 3. Se consideră un cerc de rază *R*. Fie *T* un punct al cercului şi dreapta *d* tangentă cercului în punctul *T*. Pe dreapta *d* se consideră punctele *A* şi *B*, de aceeaşi parte a lui *T* astfel încât $TA \cdot TB = 4R^2$. Fie T' punctul diametral opus puctului *T*. Dreptele AT'şi BT' mai intersectează cercul în punctele *P*, respectiv *Q*. Demonstraţi că $PQ \perp d$.

Soluţie:

$TT' \perp d$ **1p**

$\Delta ATT' \sim \Delta T'TB$ (LUL) $\boldsymbol{2p}$

$m(\sphericalangle TT'A) = m(\sphericalangle TBT') = x$; $m(\sphericalangle TAT') = m(\sphericalangle TT'B) = 90^\circ - x$

$m(\widehat{TQ}) = 180^\circ - 2x \Rightarrow m(\widehat{T'Q}) = 2x \Rightarrow m(\sphericalangle T'PQ) = x$ **3p**

$m(\sphericalangle TT'A) = m(\sphericalangle T'PQ) \Rightarrow TT' \parallel PQ \Rightarrow PQ \perp d$ **1p**

Subiectul 4. Fie tetraedrul *ABCD* cu $[AB] \equiv [AC]$ şi punctele $E \in (AB)$, $F \in (AC)$ astfel încât $[AE] \equiv [CF]$, M mijlocul segmentului $[FE]$ şi N mijlocul segmentului $[AD]$.

Arătaţi că $MN \parallel (BCD)$.

Soluţie:

Fie $EP \parallel AC$, $P \in BC$ **1p**

$\Rightarrow \Delta EBP$ isoscel cu $EB = EP$ dar $EB = AF \Rightarrow EP = AF$ $\boldsymbol{2p}$

$EP = AF$, $EP \parallel AF \Rightarrow AEPF$ paralelogram 1p

$\Rightarrow A, M, P$ coliniare și M este mijlocul lui $[AP]$ $\boldsymbol{1p}$

MN linie mijlocie în $\Delta APD \Rightarrow MN \parallel DP$, $DP \subset (BCD) \Rightarrow MN \parallel (BCD)$. $\boldsymbol{2p}$